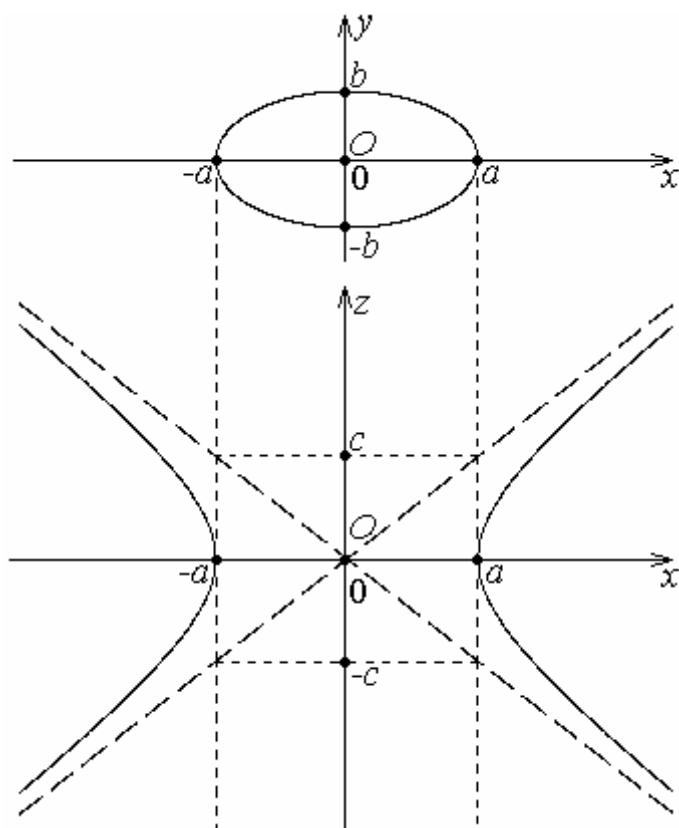
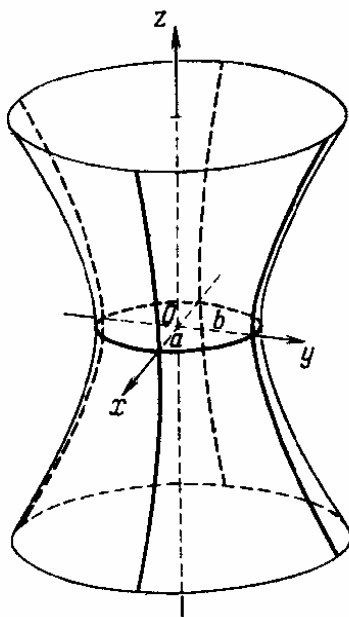


§ 12. Гиперboloиды

1. Однополостный гиперboloид.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0$.



Сечение гиперboloида плоскостью $z = 0$ — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (верхний чертёж).}$$

Сечение гиперboloида плоскостью $y = 0$ — гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (нижний чертёж).}$$

Сечение гиперboloида плоскостью $z = d$ — эллипс с полуосями $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + d^2}$ и $\frac{b}{c}\sqrt{c^2 + d^2}$. При разных значениях d все такие эллипсы имеют одинаковые эксцентриситеты. Полуоси эллипса, являющегося сечением гиперboloида плоскостью $z = 0$ (так называемого, “горлового эллипса”), равны a и b .

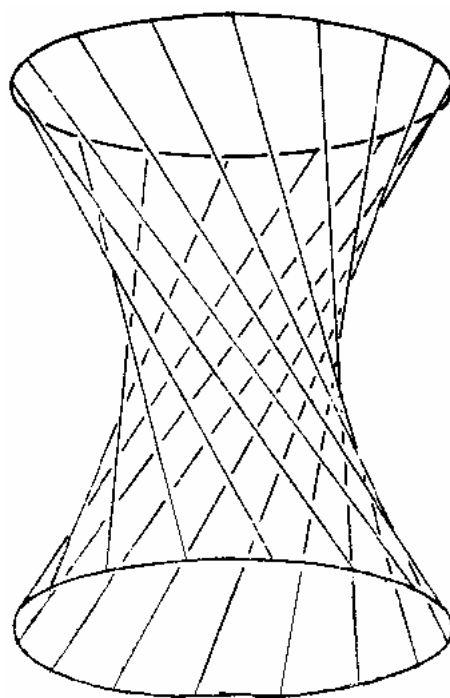
Если параметры a и b совпадают, то получаем гиперboloид вращения, имеющий уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Эта поверхность может быть образована вращением гиперболы, заданной в ДПСК Oxz каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, вокруг оси Oz . Сечение гиперboloида вращения

плоскостью $z = d$, — окружность радиуса $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + d^2}$. В частности, горловая окружность имеет радиус a .

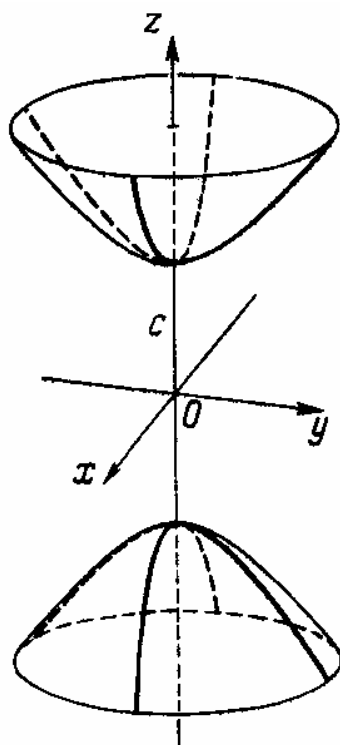
Опр 1. Линейчатой поверхностью называется поверхность, образованная движением прямой, называемой образующей.

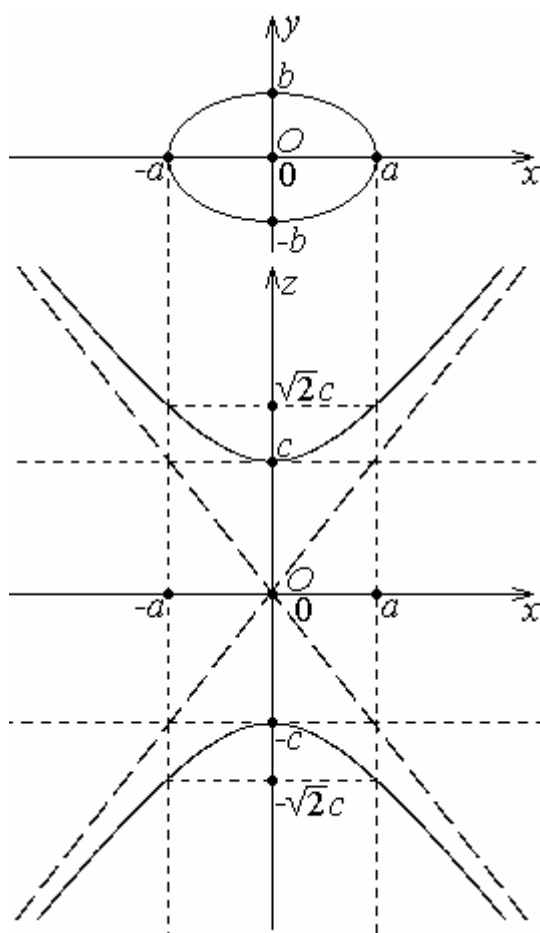
Однополостный гиперboloид является линейчатой поверхностью, имеющей два семейства образующих. Через каждую точку гиперboloида проходят две образующие, принадлежащие разным семействам. На следующем рисунке изображены образующие, принадлежащие одному семейству.



2. Двуполостный гиперболоид.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.





Сечение гиперboloида плоскостью $z = \sqrt{2}c$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (верхний чертёж).

Сечение гиперboloида плоскостью $y = 0$ — гипербола $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (нижний чертёж).

Если параметры a и b совпадают, то получаем гиперboloид вращения, имеющий уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Эта поверхность может быть образована вращением гиперболы, заданной в ДПСК Oxz каноническим уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, вокруг оси Oz . Сечение гиперboloида вращения плоскостью $z = d$, где $d > c$, — окружность радиуса $\frac{a}{c}\sqrt{d^2 - c^2}$. В частности, если $d = \sqrt{2}c$, то радиус этой окружности равен a .